204. Fandiño Pinilla M. I. (2012). Convicciones de los docentes sobre área y perímetro: una investigación. In: Sagula J. E. (ed.) (2012). *Actas del I SEM, Simposio de Educación Matemática*. Universidad de la Cuenca del Plata, Corrientes, Argentina. 6, 7, 8 settembre 2012. Corrientes: Universidad de la Cuenca del Plata. 25-30.

Conferencia Magistral CM-5:
“Convicciones de los docentes sobre área y perímetro: una investigación”
Martha I. FANDIÑO PINILLA (Universidad de Bologna, Italia)

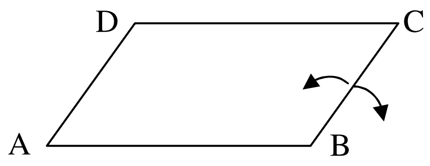
Resumen

La reiterada afirmación que «se aprende mejor fuera de la escuela», en la “práctica” o por las virtudes de alguna posición tanto mítica como misteriosa es el resultado de un hábito que se difunde siempre más. Pero, no tiene ningún fundamento.
Brousseau G. (2005). *Una modellizzazione dell’insegamento della matematica*. La matematica e la sua didattica. 3, 297-324, p. 323.

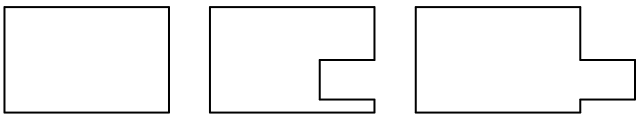
Este trabajo nace de una investigación que planteamos en 2003, conducida durante los años 2004 y 2005 y que publicamos como artículo en un primer momento en italiano:
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 2, 165-190
y después, con diversas variaciones y anexos, en español:
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*. [México D.F., México]. Vol. 10, N. 1. 39-68.
Dicha investigación se desarrolló al interno del Núcleo de Investigación en Didáctica del Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna (NRD), en el ámbito del Programa de Investigación financiado por la Universidad de Bologna: «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*».[1]
En este trabajo colaboraron, como investigadores, varios colegas; gracias a ellos, participaron como sujetos y experimentadores unos centenares de docentes y de estudiantes: imposible recordarlos todos.
La investigación evidenció un hecho que exploramos a fondo y que nos llevó a consideraciones locales (área y perímetro) y a consideraciones globales (transposición didáctica y formación de los docentes).
Iniciamos diciendo que algunos docentes (y por tanto muchos estudiantes) tienen grandes dificultades para conceptualizar el *área y* el *perímetro* y, particularmente, para comprender las mutuas relaciones entre estos; un argumento que parece estar al alcance de toda persona culta, en realidad esconde insidias que para muchos son notables y del todo inesperadas.
Si se trata de decir que el perímetro de una figura se mide en unidades lineales, por ejemplo en cm, mientras que el área se mide en unidades cuadradas, por ejemplo en cm^2, no hay problema; si se trata de aplicar fórmulas para la determinación de dichas medidas, igualmente, no hay problema. Pero, no apenas las cosas se complican o si se trata de establecer una relación entre el perímetro y el área de una misma figura, entonces nos encontramos con grandes sorpresas. Si además las figuras

[1] *Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los docentes de matemática de todos los niveles escolares.*

evolucionan o si sobre estas se deben cumplir transformaciones, ahora sí que la situación puede volverse imprevistamente compleja.
Por ejemplo, decidir la existencia o no de relaciones entre perímetro y área de una figura, supera las competencias de muchos estudiantes, sobre todo porque, como habíamos verificado, supera aquellas de muchos docentes; si después esta figura hace parte de una sucesión de figuras obtenidas mediante transformaciones, vemos como la competencia casi se anula.
Sólo para hacernos entender, damos un ejemplo; supongamos que tenemos un paralelogramo ABCD:



Supongamos que el lado AB sea fijo mientras que BC gira sobre B, "llevándose" con sí, con este movimiento, los vértices C y D (y por tanto los lados CD y AD); en cada instante de esta transformación, el cuadrilátero ABCD no deja de ser un paralelogramo. ¿Qué sucede con el área? ¿Qué sucede con el perímetro? ¿Si aumenta el área, aumenta también el perímetro? y ¿viceversa?
Otro ejemplo; consideremos las siguientes tres figuras:



La segunda fue obtenida de la primera eliminando un rectángulo, la tercera agregándolo. ¿Qué sucede con las áreas de las tres figuras? ¿Y con los perímetros?
También en este caso, elegimos un ejemplo banal, ya que por ahora nos limitamos sólo a dar la idea de lo que entendemos cuando usamos la palabra "transformación" de las figuras. No se trata por tanto de transformaciones geométricas como isometrías (directas o inversas), homotecias, similitudes, afinidades etc.
Como decíamos, estos resultados, más allá del ejemplo que discutiremos a lo largo del libro, nos han llevado a una reflexión de vasto alcance conceptual que deberemos retomar en una sede teórica oportuna, pero que ya hemos denunciado, y por tanto aquí haremos sólo una breve referencia.
Se acostumbra a identificar los tres vértices del clásico *triángulo de la didáctica* con los polos de la situación de enseñanza: maestro, estudiante y Saber (académico); afirmamos, siguiendo una línea coherente con nuestro pensamiento, que una de las tareas más interesantes y profesionales del docente consiste en la *transposición didáctica*, es decir, en la transformación de un Saber (académico) en un saber de enseñar, adaptado al grupo de estudiantes que se tiene de frente. Esto presupone, y siempre lo ha presupuesto explícitamente, una preparación del docente capaz de hacerlo partícipe del Saber (académico) para poder reelaborarlo en vista de tal transformación didáctica: su (primera) prueba de profesionalismo consiste de hecho en esto, en esta adaptación del Saber a un auditorio *real.*
Nos hemos dado cuenta, por el contrario, en más de una ocasión, que el docente, cuando explica, está al límite de sus competencias; dicho en otras palabras: *sabe aquello que enseña,* pero no sabe aquello "de más" que necesitaría, no está transformando un Saber (académico) el cual no ha hecho propio realmente, aunque haya tenido acceso. Uno de nosotros ya lo había constatado en otra ocasión (Fandiño Pinilla, 2008) a propósito de las fracciones; pero sobre el tema de área y perímetro el problema, si es posible, estuvo muy por debajo de las expectativas, por admisión misma de los docentes entrevistados, como veremos.
Estas consideraciones nos obligarán en futuro a analizar nuevamente en forma crítica el triángulo de la didáctica (que habíamos ya tenido la oportunidad de estudiar en profundidad en D'Amore y

Fandiño Pinilla, 2002, desde un punto de vista crítico constructivo). Igualmente se deberá analizar ampliamente el sistema de la formación inicial de los docentes porque nos parece que estas consideraciones sean, en resumen, un hecho nuevo: siempre más estudiantes salen de la secundaria sin la mínima noción de matemática; en más de una ocasión, hemos visto como no dominan tampoco conceptos estudiados en la escuela primaria.
En los cursos de formación universitaria para futuros docentes que hemos impartido en Italia (en varios cursos de pre-grado principalmente en Bologna, Urbino y Bressanone) y en otros países (por ejemplo Suiza), se presentan como aspirantes a futuros docentes (no sólo de primaria) estudiantes que necesitarían una formación matemática del nivel de la escuela primaria.[2] Y dado que, como veremos en este libro, aún cuando los docentes en servicio están obligados a admitir sus lagunas de base, se deberá analizar también el sentido y los contenidos de la formación continuada.
Dejaremos para el futuro, no obstante su urgencia e importancia, el análisis de las consecuencias de estas consideraciones; no las posponemos, por ahora sólo las archivamos, para poder continuar. Queremos hacer notar que tales preocupaciones nos han llevado en estos últimos años en una dirección que caracteriza no sólo nuestras investigaciones y aquellas del Núcleo del cual hacemos parte, sino también, en nuestra opinión, toda la investigación internacional.
En D'Amore (2005, 2006a) evidenciamos como, de una investigación en didáctica de la matemática "A" (entendida como *Ars docendi*, es decir *Arte de la enseñanza*) centrada en la problemática de la enseñanza (creación de proyectos, elaboración de nuevos currículos, realización de instrumentos pre-confeccionados para enseñar mejor,...) se pasó, en los años '80, a una *epistemología del aprendizaje* de la matemática (didáctica "B"), por tanto a una investigación centrada en el aprendizaje de la matemática y no sólo en su enseñanza.
Pues bien, las consideraciones de los últimos años, aquellas mismas aquí ilustradas y aquellas de muchos otros colegas investigadores de diferentes países, nos han llevado recientemente a proponer una investigación en didáctica "C" como *epistemología del docente* (D'Amore, 2006b).
Esto con referencia a la base teórica de lo que estamos proponiendo; un grito de alarma para llamar la atención, recientemente se había elevado, precisamente sobre el área y el perímetro, junto al tema de las fracciones (Fandiño Pinilla, 2008).
Esperamos, deseamos, que para los estudiosos, los docentes, los investigadores, este libro pueda ser útil para colmar lagunas, para tomar conciencia de los problemas, para crear oportunas estrategias didácticas, más conscientes y eficaces, más críticas, más razonada, no dictadas sólo por la tradición, visto desde ya como un acto repetitivo.
Este trabajo, junto al ya citado sobre las fracciones (Fandiño Pinilla, 2008) con el cual hace una pareja ideal, conservando el subtítulo y la estructura general, debería llevar al Lector atento, consciente, profesional, a analizar su propia acción didáctica sobre la base de criterios más ciertos, haciéndolo más sensible a las propuestas que hoy la didáctica de la matemática está en posibilidad de proporcionar en la actualidad.
Por otra parte, en los docentes más sensibles existe plena conciencia de estas lagunas, como se evidenció en las entrevistas que el Lector encontrará en este libro y en aquellas recolectadas, a propósito de las fracciones, en Campolucci y otros (2006); en este último trabajo de investigación se describe una *learning story*, en gran parte en forma de consideraciones personales, en donde quienes aprenden son los docentes en servicio en un curso de formación con fases de estudio gestionadas en forma autónoma; la toma de conciencia proviene del estudio mismo y de las útiles discusiones colectivas.
Se verá, analizando la bibliografía de investigación y leyendo las reflexiones de los docentes, la complejidad de la cuestión de la formación de los docentes:

- la formación matemática no basta, pero es decisiva; es absolutamente necesario formar a los docentes de matemática en matemática, haciéndolos no sólo *competentes en matemática* sino

[2] Sobre los temas de la formación inicial, por otra parte, ya nos habíamos expresado en D'Amore y Fandiño Pinilla (2003).

también dándoles una (más compleja) *competencia matemática* (sobre esta distinción necesaria, véanse las contribuciones de Fandiño Pinilla en D'Amore, Diaz Godino, Fandiño Pinilla, 2008);
- por otra parte, es universalmente acertado el hecho que tal pareja de competencias no basta: es necesaria, pero no suficiente; se requiere una sólida preparación en historia y epistemología, en didáctica general, psicología del aprendizaje, antropología y sociología, pero básicamente en didáctica de la matemática que debe convertirse en materia profesionalizante.

Hasta que no haya total conciencia sobre este punto, el problema será eludido y por tanto imposible de resolver.

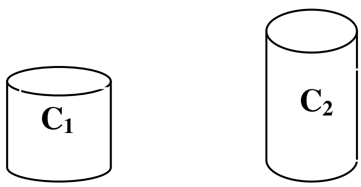
Queremos evidenciar que estamos eligiendo, para este análisis de investigación crítica, temas matemáticos tradicionales, simples, seguros, temas que son patrimonio absolutamente necesario de los currículos más comunes y que todos los docentes de matemática abordan: área y perímetro, fracciones, números naturales (sobre este tema véase: AA.VV., 2004) y otros temas usuales; no estamos profundizando en cuestiones lejanas de la práctica generalizada, como probabilidad y lógica (importantes, pero casi siempre eludidas en la escuela). Lo cual hace aún más evidente el resultado de nuestros esfuerzos de investigación y más impactante la conclusión.

Cuando se habla de área o de superficie, se puede hacer referencia a figuras planas, como triángulo, cuadrado, trapecio,... o a superficies de sólidos tridimensionales (superficies laterales o totales del cubo, del cilindro, del cono,...); en este segundo caso, se recurre a la idea de "desarrollo" de una superficie: un cierto sólido viene como "abierto" y se "extiende" sobre el plano; entonces una medida interesante es la de su superficie; en dicho caso, obviamente, se pierde la idea de perímetro.

Nosotros no examinaremos este tipo de superficie, nuestro estudio se centra sólo en la superficie de figuras planas.

Pero, no perdemos la ocasión para evidenciar que, también en las relaciones entre superficie y volumen de los sólidos, existen falsas convicciones que, en ocasiones, son verdaderas mis-concepciones mientras que en otros momentos son sólo ligerezas... seudo-deductivas las cuales emergen de expectativas erradas (el análisis de algunas de estas se encuentran en el capítulo 4).

Por ejemplo, supongamos de "enrollar" dos hojas de papel tamaño carta, la primera en torno a la dimensión menor y la segunda en torno a la dimensión mayor; se obtienen dos cilindros (respectivamente C_1 y C_2).



Es obvio que las superficies laterales de los dos cilindros tienen igual área, dado que se trata en los dos casos de una hoja tamaño carta. Pero: ¿y los dos volúmenes? ¿los volúmenes de C_1 y de C_2 tienen igual medida?

Pues bien, la mayor parte de las personas a quienes se les propone esta pregunta tienden a responder afirmativamente, mientras que la respuesta correcta es negativa: uno de los cilindros tiene un volumen netamente superior al volumen del otro.

Existe entonces una elegante analogía que se podría expresar, bromeando matemáticamente, así:

perímetro : área = área : volumen.

Esta analogía fue objeto de investigación específica (Sbaragli, 2006).

Sobre este punto, se manifestó inclusive Galileo Galilei (1564 – 1642); él escribió una de las obras estilísticamente más bellas de todo el vasto panorama del Renacimiento literario italiano, *Discorsi intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*,[3] publicada en 1638, causando una gran polémica en los años que siguieron (Galilei, 1638-1964).

---

[3] *Discursos acerca de dos nuevas ciencias relacionadas con la mecánica y los movimientos locales.*

Ahora bien, en la primera jornada, en las páginas 627-8 de la edición consultada por nosotros y citada en la bibliografía, se encuentra la siguiente afirmación de Salviati, uno de los tres "interlocutores" protagonistas del dialogo: «(...) De aquí se entiende la razón de un hecho que no sin maravilla viene advertido por el pueblo; y es, cómo puede ser que el mismo pedazo de tela más largo de un lado que del otro, si se hiciera un saco para contener el trigo, como se acostumbra hacer con un mantel, tendrá mucho más trigo si se hace que la altura del saco sea de la menor medida de la tela que haciéndola al contrario (...)».[4]
Un ejemplo ilustre y concreto del problema de la hoja tamaño carta "enrollada" como lo habíamos descrito líneas antes!
Como lo habíamos ya dicho, nosotros no nos ocupamos de volúmenes o de superficies en el espacio, reservando nuestro estudio sólo a figuras en el plano en sentido clásico.

Bibliografía

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotà: Magisterio. Prefacio de Carlos Vao Uribe. [Primera edicción italiana: 2006, Trento: Erickson].

[4] La traducción es nuestra.